UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE TECNOLOGIA

PROGRAMA DE EDUCAÇÃO TUTORIAL

II CURSO PRÉ ENGENHARIA

APOSTILA DE CÁLCULO

Realização:

PET CIVIL UFC

PET Eng. Elétrica

PET Engenharia Mecânica

PET Metalúrgica

PET Engenharia Química UFC

Fortaleza, Fevereiro/2010

1. LIMITES

1.1. *Definição Geral*

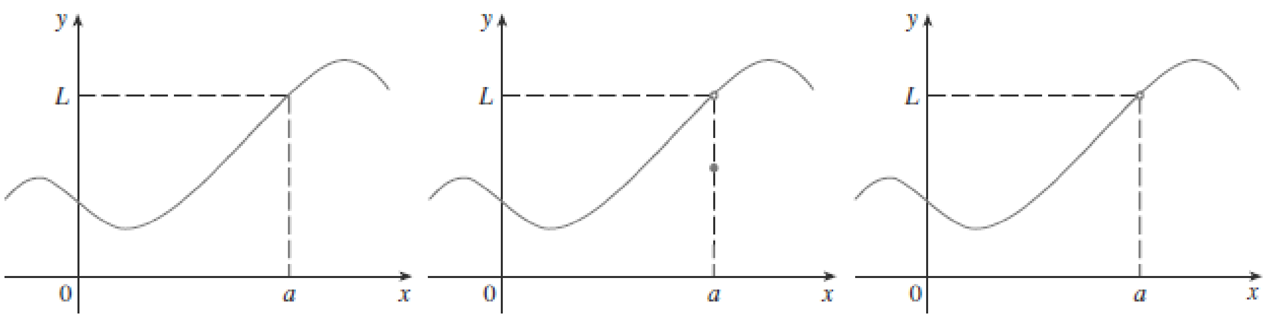
Se os valores de f(x) puderem ser tão próximos quanto quisermos de L, fazendo x suficientemente próximo de A (mas não igual a A), então escrevemos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

O que deve ser lido como "o limite de f(x) quando x tende a *a* é *L*".

De outra forma, isso significa que os valores de f(x) ficam cada vez mais próximos do número *L* à medida que x tende ao número *a*, mas x≠ *a*.

Preste atenção na frase "mas x≠*a*", significa que no limite de f(x) quando x tende a *a* nunca consideramos x= *a*. Então, f(x) não precisa sequer está definida em *a*, somente nas proximidades de *a*.



(a) (b) (c)

Figura 1

Na figura 1, note que, na parte (c), f(a) não está definida e, na parte (b), f(a) ≠L. Mas, em cada caso, o limite é igual a L.

1.2. *Limites Laterais*

- ***Definição***

Dizemos que o **limite de f(x) quando x tende a *a* pela esquerda** é igual a *L*, se pudermos tornar os valores de f(x) arbitrariamente próximos de *L*, tornando x suficientemente próximo de *a* e x menor do que *a*, e escrevemos:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Analogamente, definimos o **limite de f(x) quando x tende a *a* pela direita** e escrevemos:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Da definição geral de limite, concluímos que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{se e somente se} \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Ou seja, o limite de uma dada função existe, em um dado ponto, quando existirem os limites laterais (no dado ponto) pela direita e pela esquerda, e os mesmos forem iguais.

1.3. *Limites Infinitos*

- ***Definição***

Seja *f* uma função definida em ambos os lados de *a*, exceto possivelmente em *a*. Se podemos, através de uma escolha adequada de x, nas proximidades de *a*, fazer os valores de *f*(x) ficarem arbitrariamente grandes (tão grande quanto quisermos), então escrevemos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$$

E lê-se **"o limite de *f*(x), quando x tende a *a*, é infinito"**.

- Exemplo Resolvido

Queremos encontrar o limite $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$

Para a função *f*(x)= $1/x^2$, temos o seguinte gráfico

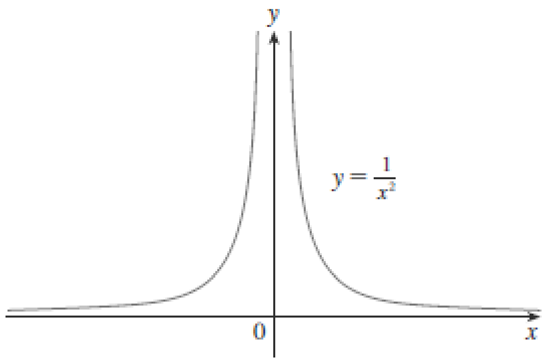


Figura 2

Vemos que, à medida que x se aproxima de 0, x^2 também se aproxima de 0, e $1/x^2$ fica muito grande. Então, tomando valores de x próximos de 0, observamos que *f*(x) torna-se arbitrariamente grande e, para indicar o comportamento da função, escrevemos:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

Isso não significa considerar ∞ como sendo um número, é simplesmente uma forma de expressar que o limite de *f*(x) pode assumir valores tão grandes quanto quisermos, bastando escolher valores de x adequadamente próximos de 0.

1.4. *Cálculo dos Limites*

1.4.1. *Utilizando a Definição Precisa de limite*

- ***Definição***

Seja f uma função definida sobre algum intervalo aberto que contém o número a, exceto possivelmente em a. Então dizemos que o **limite de *f*(x) quando x tende a *a* é *L***, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Se para todo número $\varepsilon > 0$ há um número correspondente $\delta > 0$ tal que

$| f(x) - L| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - a| < \delta$

Uma vez que $|x - a|$ é a distância de x a a e $| f(x) - L|$ é a distância de $f(x)$ a L, e como ε pode ser arbitrariamente pequeno, a definição de um limite pode ser expressa como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Significa que a distância entre $f(x)$ e L pode ser arbitrariamente pequena tornando-se a distância de x a a suficientemente pequena(mas não 0).

Uma interpretação geométrica pode ser dada, observando o gráfico da função e notando que uma escolha de um $\varepsilon > 0$ menor implica um $\delta > 0$ menor, como mostrado nas figuras 3 e 4.

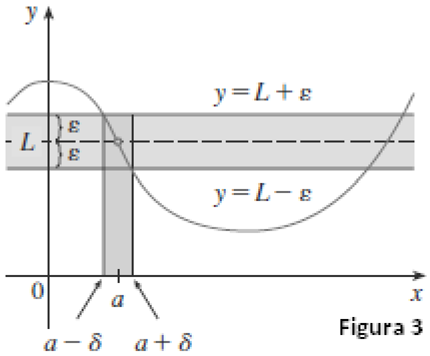


Figura 3

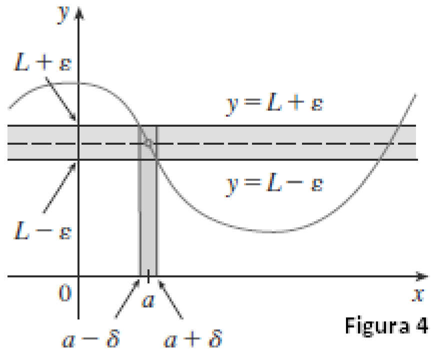


Figura 4

- ***Exemplo Resolvido***

Prove que existe o limite $\lim_{x \to 3} (4x - 5) = 7$.

Inicialmente, devemos achar um δ tal que

$|(4x - 5) - 7| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 3| < \delta$

Temos que $|(4x - 5) - 7| = |4x - 12| = |4(x - 3)| = 4|x - 3|$, então queremos

$4|x - 3| < \varepsilon$ sempre que $0 < |x - 3| < \delta$ ou,

$|x - 3| < \varepsilon/4$ sempre que $0 < |x - 3| < \delta$

Então podemos escolher $\delta = \varepsilon/4$.

Agora, devemos mostrar que a escolha de δ funciona.

Se $0 < |x - 3| < \delta$, então

$$|(4x-5)-7| = 4|x-3| < 4\delta = \varepsilon$$

Ou seja,

$$|(4x-5)-7| < \varepsilon \qquad \text{sempre que} \qquad 0 < |x-3| < \delta$$

Portanto, pela definição de limite,

$$\lim_{x\to 3}(4x-5) = 7$$

Graficamente, temos a ilustração do exemplo na figura 5.

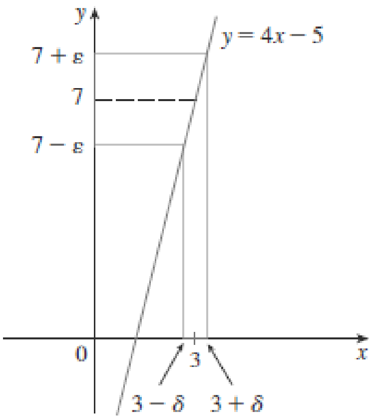


Figura 5

1.4.2. *Utilizando as Leis do Limite*

Leis do Limite Seja c uma constante e suponha que existam os limites $\lim_{x\to a} f(x)$ e $\lim_{x\to a} g(x)$

Então

1. $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$

"O limite de uma soma é a soma dos limites"

2. $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$

"O limite da diferença é a diferença dos limites"

3. $\lim_{x\to a}[cf(x)] = c\lim_{x\to a} f(x)$

"O limite de uma constante vezes uma função é a constante vezes o limite da função"

4. $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$

"O limite de um produto é o produto dos limites"

5. $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ se $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$

"O limite de um quociente é o quociente dos limites
(Desde que o limite do denominador seja diferente de zero)"

Das cinco leis apresentadas acima, são derivadas as leis seguintes:

6. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^n$ onde n é um inteiro positivo

7. $\lim_{x \to a} c = c$

8. $\lim_{x \to a} x = a$

9. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ onde n é um inteiro positivo

10. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ onde n é um inteiro positivo

[Se n for par, supomos que $a > 0$.]

11. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ onde n é um inteiro positivo

[Se n for par, supomos que $\lim_{x \to a} f(x) > 0$.]

- ***Exemplos Resolvidos***

Calcule, utilizando as Leis do Limite, os limites abaixo

a) $\lim_{x \to -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -2} (3x^4 + 2x^2 - x + 1) &= \lim_{x \to -2} 3x^4 + \lim_{x \to -2} 2x^2 - \lim_{x \to -2} x + \lim_{x \to -2} 1 && \text{[Leis 1 e 2]}\\ &= 3\lim_{x \to -2} x^4 + 2\lim_{x \to -2} x^2 - \lim_{x \to -2} x + \lim_{x \to -2} 1 && [3]\\ &= 3(-2)^4 + 2(-2)^2 - (-2) + (1) && [9, 8 \text{ e } 7]\\ &= 48 + 8 + 2 + 1 = 59\end{aligned}$$

b) $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 6x - 4}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 6x - 4} &= \frac{\lim_{x \to 2} (2x^2 + 1)}{\lim_{x \to 2} (x^2 + 6x - 4)} && \text{[Lei 5]}\\ &= \frac{2\lim_{x \to 2} x^2 + \lim_{x \to 2} 1}{\lim_{x \to 2} x^2 + 6\lim_{x \to 2} x - \lim_{x \to 2} 4} && [2, 1 \text{ e } 3]\\ &= \frac{2(2)^2 + 1}{(2)^2 + 6(2) - 4} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} && [9, 7 \text{ e } 8]\end{aligned}$$

c) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2}$

Não podemos encontrar o limite substituindo diretamente x = 2, pois tornamos, dessa forma, o denominador nulo.

Fatorando o numerador como uma diferença de quadrados, temos:

$$\frac{x^2+x-6}{x-2} = \frac{(x+3)(x-2)}{x-2}$$

Quando tomamos o limite quando x tende a 1, temos x≠1, e assim x – 1 ≠ 0. Logo, podemos cancelar o fator comum e calcular o limite, como se segue:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+3)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x+3) = 2+3 = 5$$

Por meio dos exemplos, podemos notar que se *f* for uma função polinomial ou racional e *a* estiver no domínio de *f*, então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- ***Exercícios Propostos***

Calcule os limites, se existirem:

1. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$

2. $\lim_{x \to -4} \frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 + 3x - 4}$

3. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x + 6}{x - 2}$

4. $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

5. $\lim_{t \to -3} \frac{t^2 - 9}{2t^2 + 7t + 3}$

6. $\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$

7. $\lim_{h \to 0} \frac{(4 + h)^2 - 16}{h}$

8. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$

9. $\lim_{h \to 0} \frac{(1 + h)^4 - 1}{h}$

10. $\lim_{h \to 0} \frac{(2 + h)^3 - 8}{h}$

11. $\lim_{t \to 9} \frac{9 - t}{3 - \sqrt{t}}$

12. $\lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{1 + h} - 1}{h}$

13. $\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$

14. $\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$

15. $\lim_{x \to -4} \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{x}}{4 + x}$

16. $\lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t^2 + t} \right)$

17. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}$

18. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(3 + h)^{-1} - 3^{-1}}{h}$

19. $\lim\limits_{t \to 0} \left(\dfrac{1}{t\sqrt{1 + t}} - \dfrac{1}{t} \right)$

20. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x} - x^2}{1 - \sqrt{x}}$

21. $\lim\limits_{x \to -4} |x + 4|$

22. $\lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{|x + 4|}{x + 4}$

23. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{|x - 2|}{x - 2}$

24. $\lim\limits_{x \to 1.5} \dfrac{2x^2 - 3x}{|2x - 3|}$

25. Calcule $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{6 - x} - 2}{\sqrt{3 - x} - 1}$.

26. Existe um valor de a tal que

$\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$ exista? Caso afirmativo, encontre a e o valor do limite

1.5. *Limites no Infinito*

- ***Definição***

Seja *f* uma função definida e, algum intervalo (a , ∞). Então

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Significa que os valores de *f*(x) podem ficar arbitrariamente próximos de *L*, tornando-se x suficientemente grande.

E lê-se **"o limite de *f*(x), quando x tende ao infinito, é *L*".**

Note que existem várias formas de o gráfico de *f* aproximar-se da reta y = *L* (chamada assíntota horizontal), variando o valor de x, como ilustrado nas figuras 6, 7 e 8.

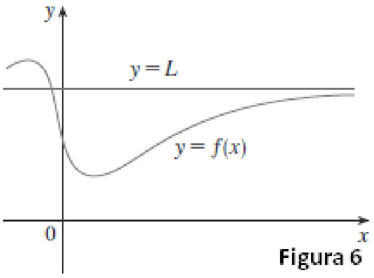


Figura 6

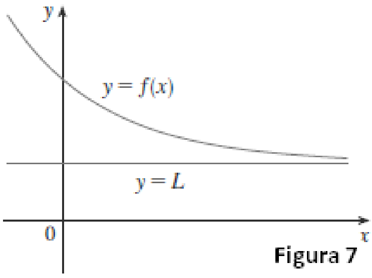


Figura 7

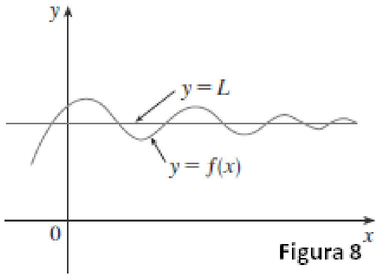


Figura 8

- ***Exemplo Resolvido***

Queremos encontrar o limite abaixo:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x - 2}{5x^2 + 4x + 1}$$

Para calcular limites no infinito, primeiro dividimos o numerador e o denominador pela maior potência de x que ocorre no denominador. No nosso caso, a maior potência de x é x^2, então temos:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x-2}{5x^2+4x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3x^2-x-2}{x^2}}{\dfrac{5x^2+4x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(5+\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)} \qquad \text{(Lei 5)}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}-2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}5+4\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}} \qquad \text{(1, 2 e 3)}$$

$$=\frac{3-0-0}{5+0+0} \qquad \text{(7)}$$

$$=\frac{3}{5}$$

- ***Exercícios Propostos***

Calcule os limites:

27. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+4}{2x^2+5x-8}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{\dfrac{12x^3-5x+2}{1+4x^2+3x^3}}$

29. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x+3}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+5}{x-4}$

31. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1-x-x^2}{2x^2-7}$

32. $\lim\limits_{y\to\infty}\dfrac{2-3y^2}{5y^2+4y}$

33. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+5x}{2x^3-x^2+4}$

34. $\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{t^2+2}{t^3+t^2-1}$

35. $\lim\limits_{u\to\infty}\dfrac{4u^4+5}{(u^2-2)(2u^2-1)}$

36. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+2}{\sqrt{9x^2+1}}$

37. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

38. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{9x^6-x}}{x^3+1}$

39. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2+x}-3x\right)$

40. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+2x}\right)$

41. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-\sqrt{x^2+bx}\right)$

42. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)$

43. $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}$

44. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[3]{x}$

45. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x + x^3 + x^5}{1 - x^2 + x^4}$

46. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - 2x + 3}{5 - 2x^2}$

47. $\lim_{x\to-\infty} (x^4 + x^5)$

1.6. *Outros Limites*

1.6.1. *Limite Trigonométrico Fundamental*

$$\boxed{\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1}$$

Do Limite Trigonométrico Fundamental, obtemos:

$$\boxed{\lim_{\theta\to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0}$$

- ***Exemplo Resolvido***

Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x}{4x}$.

Temos que $\dfrac{\sin 7x}{4x} = \dfrac{7}{4}\left(\dfrac{\sin 7x}{7x}\right)$

Logo $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{4x} = \lim_{x\to 0} \frac{7}{4}\left(\frac{\sin 7x}{7x}\right)$$
$$= \frac{7}{4}\lim_{x\to 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \frac{7}{4}\cdot 1 = \frac{7}{4}$$

- ***Exercícios Propostos***

Calcule os limites:

48. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{x}$

49. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 6x}$

50. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\tan 6t}{\sin 2t}$

51. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\cos\theta - 1}{\sin\theta}$

52. $\lim_{\theta\to 0} \dfrac{\sin(\cos\theta)}{\sec\theta}$

53. $\lim_{t\to 0} \dfrac{\sin^2 3t}{t^2}$

54. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cot 2x}{\csc x}$

55. $\lim_{x\to \pi/4} \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$

1.6.2. *Limite Exponencial Fundamental*

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$ ou (se colocarmos n = 1/x) $$e = \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x}$$

O valor de e é $e \approx 2.7182818$

- ***Exercícios Propostos***

Calcule os limites:

56. $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$

57. $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{4n}$

58. $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{4}{n}\right)^{n}$

59. $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{n}$

60. Mostre que $\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n} = e^x$ para qualquer $x > 0$.

1.7. *Continuidade*

- ***Definição***

Uma função *f* é **contínua em um número *a*** se,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Essa definição implicitamente requer três condições para a continuidade de *f* em *a*:

1. $f(a)$ está definida (isto é, a está no domínio de f)
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Se *f* não for contínua em *a*, dizemos que ***f* é descontínua em *a***. Um ponto de descontinuidade de uma função é um ponto onde o gráfico apresenta uma interrupção (um buraco ou um salto).

Geometricamente, você pode pensar em uma função contínua como uma função cujo gráfico não se quebra. O gráfico pode ser desenhado sem remover sua caneta do papel.

- ***Exercícios Propostos***

Use a definição de continuidade e as propriedades dos limites para provar que a função é contínua em um dado número.

61. $f(x) = x^2 + \sqrt{7 - x}, \quad a = 4$

62. $f(x) = (x + 2x^3)^4, \quad a = -1$

63. $g(x) = \dfrac{x + 1}{2x^2 - 1}, \quad a = 4$

Explique por que a função é descontinua no número dado.

64. $f(x) = \ln|x - 2| \qquad a = 2$

65. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

66. $f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad a = 0$

67. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 1} & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases} \qquad a = 1$

68. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 12}{x + 3} & \text{se } x \neq -3 \\ -5 & \text{se } x = -3 \end{cases} \qquad a = -3$

69. $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{se } x < 1 \\ 4 - x & \text{se } x \geqslant 1 \end{cases} \qquad a = 1$

2. Derivadas

2.1. *Definição*

A **derivada de uma função *f* em um número *a***, denotada por $f'(a)$, é

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Se o limite existe.

Escrevendo x = $a + h$, temos uma maneira equivalente de escrever a definição de derivada

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- ***Exemplo***

Encontre a derivada da função $f(x)=3-2x+4x^2$ em um número a

$$f^{/}(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{[3-2(a+h)+4(a+h)^2]-(3-2a+4a^2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{[3-2a-2h+4a^2+8ah+4h^2]-(3-2a+4a^2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h+8ah+4h^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(-2+8a+4h)}{h}=\lim_{h\to 0}(-2+8a+4h)=-2+8a$$

- ***Exercícios Propostos***

1. $f(x)=3-2x+4x^2$

2. $f(t)=t^4-5t$

3. $f(t)=\dfrac{2t+1}{t+3}$

4. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-2}$

2.2. *Interpretação Geométrica*

A reta tangente a y = *f*(x) em (*a*, *f*(*a*)) é a reta que passa em (*a*, *f*(*a*)), cuja inclinação é igual a *f'*(*a*), a derivada de *f* em *a*.

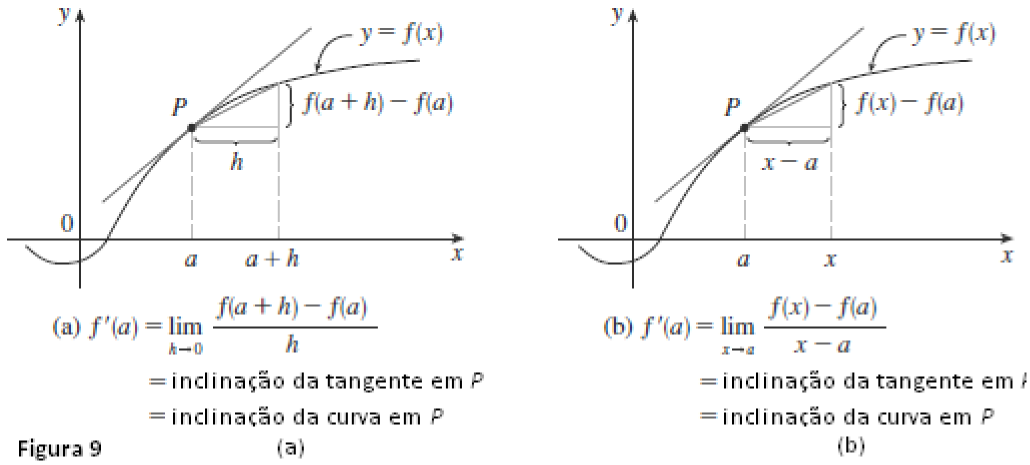


Figura 9

A figura 9 ilustra a interpretação geométrica de uma derivada.

2.3. *Derivadas de Funções Polinomiais e da Função Exponencial Natural*

2.3.1. *Derivada da Função Constante*

O gráfico da função constante, *f*(x) = *c*, é a reta horizontal *y* = *c*, cuja inclinação é 0. Logo, devemos ter *f'*(x) = 0. Calculando a derivada pela definição, temos:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}0=0$$

Então, concluímos:

Derivada de uma Função Constante $\frac{d}{dx}(c) = 0$

2.3.2. *Derivada da Função Potência*

O gráfico da função $f(x) = x$ é a reta $y = x$, cuja inclinação é 1. Logo:

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

Para a função potência $f(x) = x^n$, podemos determinar que:

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x \qquad \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2 \qquad \frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$$

Através dos exemplos para n = 1,2,3 e 4, podemos supor que, para n inteiro, $(d/dx)(x^n) = nx^{n-1}$

Calculando a derivada, pela definição, de $f(x) = x^n$, temos:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$$

Fazendo $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})$ temos,

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) \\ &= a^{n-1} + a^{n-2}a + \cdots + aa^{n-2} + a^{n-1} \\ &= na^{n-1} \end{aligned}$$

A regra da derivada da potência também é verdadeira para todo *n* real. Concluindo:

A Regra da Potência Se n for um número real qualquer, então $$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

- ***Exemplo Resolvido***

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dx}(x^8 + 12x^5 - 4x^4 + 10x^3 - 6x + 5) \\ &= \frac{d}{dx}(x^8) + 12\frac{d}{dx}(x^5) - 4\frac{d}{dx}(x^4) + 10\frac{d}{dx}(x^3) - 6\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(5) \\ &= 8x^7 + 12(5x^4) - 4(4x^3) + 10(3x^2) - 6(1) + 0 \\ &= 8x^7 + 60x^4 - 16x^3 + 30x^2 - 6 \end{aligned}$$

- ***Exercícios Propostos***

Diferencie

5. $F(x) = -4x^{10}$

6. $g(x) = 5x^8 - 2x^5 + 6$

7. $f(t) = \frac{1}{2}t^6 - 3t^4 + t$

8. $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$

9. $Y(t) = 6t^{-9}$

10. $R(t) = 5t^{-3/5}$

11. $y = \sqrt[3]{x}$

12. $R(x) = \dfrac{\sqrt{10}}{x^7}$

2.3.3. *Derivada da Função exponencial*

Seja a função exponencial $f(x) = a^x$. Utilizando a definição de derivada, temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^x a^h - a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{a^x(a^h-1)}{h}$$

O fator a^x não depende de h, logo podemos colocá-lo adiante do limite. Além disso, temos que o limite obtido é o valor da derivada de f em 0, logo:

$$f'(x) = a^x \lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h} = f'(0)$$

$$f'(x) = f'(0)a^x$$

A análise numérica (Figura 10) da equação encontrada, para a = 2 e a = 3, nos fornece o seguinte resultado:

h	$\frac{2^h-1}{h}$	$\frac{3^h-1}{h}$
0.1	0.7177	1.1612
0.01	0.6956	1.1047
0.001	0.6934	1.0992
0.0001	0.6932	1.0987

Figura 10

Para $a = 2$, $\quad f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{2^h-1}{h} \approx 0.69$

Para $a = 3$, $\quad f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{3^h-1}{h} \approx 1.10$

Ao escolhermos a base a, a fórmula de diferenciação mais simples ocorre quando $f'(0) = 1$. Pela análise numérica feita para a = 2 e a = 3, estima-se que o valor de a que torna $f'(0) = 1$ está entre 2 e 3. Esse valor é denotado pela letra e. Assim, temos a seguinte definição.

Definição do Número e

$$e \text{ é o número tal que } \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

Se fizermos $a = e$ e, consequentemente, $f'(0) = 1$ teremos:

Derivada da Função Exponencial Natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

- ***Exemplo Resolvido***

Se $f(x) = e^x - x$, ache $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

- ***Exercícios Propostos***

15. $y = 5e^x + 3$

16. $G(x) = \sqrt{x} - 2e^x$

17. $y = ae^v + \frac{b}{v} + \frac{c}{v^2}$

18. $y = e^{x+1} + 1$

2.4. *As Regras do Produto e do Quociente*

2.4.1. *Regra do Produto*

A Regra do Produto diz que *a derivada de um produto de duas funções é a primeira função vezes a derivada da segunda função mais a segunda função vezes a derivada da primeira função*.

A Regra do Produto Se f e g forem diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

- ***Exercícios Propostos***

19. x^2e^x

20. $f(t) = (t^6 - 3t^4 + t)(t^4 + 8)$

21. $y = e^x(x^5 - 20x^3 + 50x)$

22. $f(x) = (e^x - 5x)(5x^8 - 2x^5 + 6)$

2.4.2. *Regra do Quociente*

A Regra do Produto diz que *a derivada de um quociente é o denominador vezes a derivada o numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, todos divididos pelo quadrado do denominador*.

A Regra do Quociente Se f e g forem diferenciáveis, então

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

- ***Exercícios Propostos***

23. $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

24. $y = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 3x - 4}$

25. $y = \dfrac{\sqrt{x} - 2e^x}{\sqrt{x}}$

26. $y = \dfrac{x^2 - 2\sqrt{x}}{e^{x+1} + 1}$

2.5. *Derivadas de Funções Trigonométricas, Exponenciais e Logarítmicas*

2.5.1. *Derivadas das Funções Trigonométricas*

Derivadas das Funções Trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

- ***Exemplo Resolvido***

Calcule a derivada de tg x, a partir das derivadas de sen x e cos x.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\tan x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) \\
&= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x
\end{aligned}$$

- ***Exercícios Propostos***

Diferencie

27. $f(x) = x - 3\sin x$

28. $f(x) = x\sin x$

29. $y = \sin x + 10\tan x$

30. $y = 2\csc x + 5\cos x$

31. $y = \dfrac{x}{\cos x}$

32. $y = \dfrac{1 + \sin x}{x + \cos x}$

33. $f(\theta) = \dfrac{\sec\theta}{1 + \sec\theta}$

34. $y = \dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$

2.5.2. *Derivadas das Funções Exponenciais e Logarítmicas*

Derivada da Função Exponencial

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a \qquad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Derivada da Função Logarítmica

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x\ln a} \qquad \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

- ***Exemplo Resolvido***

Calcule as derivadas de 2^x e $f(x) = \log_{10}2$.

$$\frac{d}{dx}(2^x) = 2^x \ln 2$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\log_{10}2 = \frac{1}{2\ln 10}$$

2.6. *Regra da Cadeia*

A Regra da Cadeia é utilizada para calcular a derivada de funções compostas.

A Regra da Cadeia Se f e g forem diferenciáveis e $F = f \circ g$ for a função composta definida por $F(x) = f(g(x))$, então F é diferenciável e F' é dada pelo produto

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

ou, se $y = f(u)$ e $u = g(x)$ forem funções diferenciáveis, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

- ***Exemplo Resolvido***

Calcule $F'(x)$ se $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

$$F(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) \text{ onde } f(u) = \sqrt{u} \text{ e } g(x) = x^2 + 1$$

Sendo $f'(u) = \frac{1}{2}u^{-1/2} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ e $g'(x) = 2x$

Temos $F'(x) = f'(g(x))g'(x)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

- ***Exercícios Propostos***

Derive as funções

35. $F(x) = \sin 4x$

36. $F(x) = \sqrt{4 + 3x}$

37. $F(x) = (x^3 + 4x)^7$

38. $F(x) = (x^2 - x + 1)^3$

39. $y = \cos(a^3 + x^3)$

40. $y = a^3 + \cos^3 x$

41. $y = xe^{-x^2}$

42. $y = 10^{1-x^2}$

43. $f(x) = \ln(x^2 + 10)$

44. $f(x) = \log_2(1 - 3x)$

45. $f(x) = \cos(\ln x)$

46. $F(y) = y \ln(1 + e^y)$

Encontre y' e y''.

47. $y = x \ln x$

48. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$

49. $y = \log_{10} x$

50. $y = \ln(\sec x + \tan x)$

2.7. *Aplicações de Derivação*

2.7.1. *Reta Tangente*

Na seção 2.2, vimos que:

A reta tangente a y = *f*(x) em (*a*, *f*(*a*)) é a reta que passa em (*a*, *f*(*a*)), cuja inclinação é igual a *f'*(*a*), a derivada de *f* em *a*.

Logo, se usarmos a fórmula da equação de uma reta, vista em geometria analítica, poderemos escrever uma equação da reta tangente à curva y = *f*(x) no ponto (*a*, *f*(*a*)):

$y - f(a) = f'(a)(x - a)$

- ***Exemplo Resolvido***

Encontre uma equação da reta tangente a parábola $y = x^2 - 8x + 9$ no ponto (3, -6).

Temos que a derivada de $f(x) = x^2 - 8x + 9$ em a é $f'(a) = 2a - 8$. Logo, a inclinação da reta tangente em (3, -6) é $f'(3) = 2(3) - 8 = -2$. Assim, uma equação da reta tangente, como ilustrado na figura 11, é

$y - (-6) = (-2)(x - 3)$ ou $y = -2x$

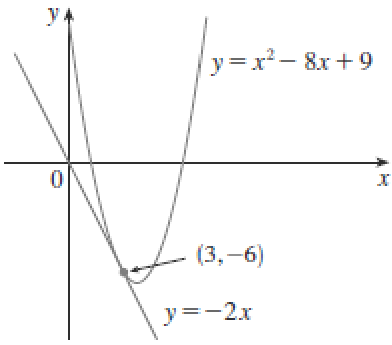


Figura 11

- ***Exercícios Propostos***

51. Se $f(x) = 3x^2 - 5x$, encontre $f'(2)$ e use-o para achar uma equação da reta tangente à parabola $y = 3x^2 - 5x$ no ponto (2, 2).

52. Se $g(x) = 1 - x^3$, encontre $g'(0)$ e use-o para achar uma equação da reta tangente à parabola $y = 1 - x^3$ no ponto (0, 1).

53. Se a reta tangente a $y = f(x)$ em (4, 3) passa no ponto (0, 2), encontre $f(4)$ e $f'(4)$.

Encontre uma equação da reta tangente à curva no ponto dado.

54. $y = 1 + 2x - x^3$, $(1, 2)$

55. $y = \sqrt{2x + 1}$, $(4, 3)$

56. $y = (x - 1)/(x - 2)$, $(3, 2)$

57. $y = 2x/(x + 1)^2$, $(0, 0)$

2.7.2. *Velocidades*

Suponha um objeto movendo-se sobre uma linha reta de acordo com a equação $s = f(t)$, onde s é o deslocamento do objeto a partir da origem no instante t. A função f que descreve o movimento é chamada de **função posição** do objeto. No intervalo de tempo entre $t = a$ e $t = a + h$ a variação na posição será de $f(a + h) - f(a)$ (Figura 12). A velocidade média nesse intervalo é

$$\textit{velocidade média} = \frac{\textit{deslocamento}}{\textit{tempo}} = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

que é igual a inclinação da reta tangente PQ (m_{PQ}), como ilustrado na Figura 13.

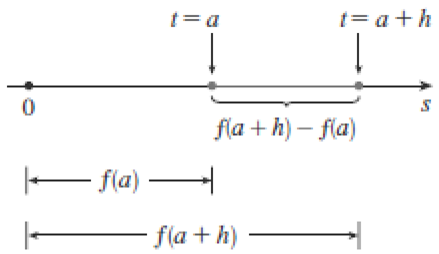


Figura 12

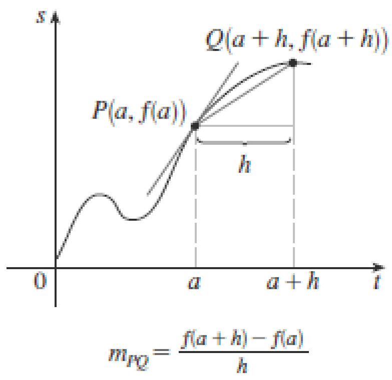


Figura 13

Suponha agora que a velocidade média seja calculada em intervalos cada vez menores [*a*, *a* + *h*]. Em outras palavras, fazemos *h* tender a 0. Definimos velocidade (ou velocidade instantânea) *v*(*a*) no instante *t* = *a* como sendo o limite dessas velocidades médias:

$$\boxed{v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}}$$

O limite acima representa a derivada da função posição do objeto no ponto *a*, ou seja:

$$\boxed{v(a) = f'(a)}$$

De forma análoga à velocidade, e definindo a função velocidade, temos que a aceleração do objeto é dada pela derivada da **função velocidade**, logo:

$$\boxed{a(a) = v'(a)}$$

- ***Exercícios Propostos***

58. Se uma bola for atirada ao ar com uma velocidade de 40 pés/s, sua altura (em pés) depois de t segundos é dada por $y = 40t - 16t^2$. Encontre a velocidade quando $t = 2$.

59. Se uma flecha é atirada para cima sobre a superfície da Lua com uma velocidade de 58 m/s, sua altura (em metros) após t segundos é dada por $H = 58t - 0.83t^2$.

(a) Encontre a velocidade da flecha após 1 segundo.
(b) Encontre a velocidade da flecha quando $t = a$.
(c) Quando a flecha volta para a lua?
(d) Com que velocidade a flecha atinge a Lua?

60. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo da reta é dado pela equação do movimento $s = 4t^3 + 6t + 2$, onde t é medido em segundos, Encontre a velocidade e a aceleração da partícula nos instantes $t = a$, $t = 1$, $t = 2$, and $t = 3$.

61. O deslocamento (em metros) de uma partícula movendo-se ao longo da reta é dado pela equação $s = t^2 - 8t + 18$, onde t é medido em segundos.

(a) Encontre as velocidades médias sobre os seguintes intervalos de tempo:

(i) $[3, 4]$ (ii) $[3.5, 4]$

(iii) $[4, 5]$ (iv) $[4, 4.5]$

(b) Enconte a velocidade instantânea quando $t = 4$.

2.7.3. *Valores Máximo e Mínimo*

Algumas das aplicações mais importantes do cálculo diferencial são os *problemas de otimização*, em que devemos encontrar a melhor maneira de resolver um problema. Esses problemas podem ser resolvidos encontrando os valores de máximo e mínimo de uma função.

- ***Definição***

Uma função *f* tem um **máximo absoluto** em *c* se *f*(*c*) ≥ *f*(x) para todo x em *D*, onde *D* é o domínio de *f*. O número *f*(*c*) é chamado de **valor máximo** de *f* em *D*. Analogamente, *f* tem um **mínimo absoluto** em *c* se *f*(*c*) ≤ *f*(x) para todo x em *D*, e o número *f*(*c*) é chamado de **valor mínimo** de *f* em *D*. Os valores máximos e mínimos de *f* são chamados de **valores extremos** de *f*.

A Figura 14 mostra o gráfico de uma função *f* com máximo absoluto em *d* e mínimo absoluto em *a*. Note que (*d*, *f*(*d*)) é o ponto mais alto do gráfico, enquanto (*a*, *f*(*a*)) é o ponto mais baixo.

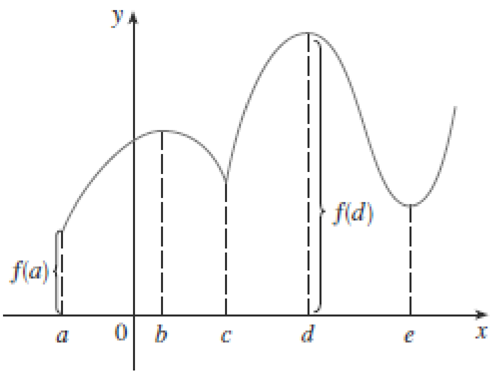


Figura 14

Uma função *f* tem um **máximo local** em *c* se *f*(*c*) ≥ *f*(x) quando x estiver nas proximidades de *c.* Analogamente, *f* tem um **mínimo local** em *c* se *f*(*c*) ≤ *f*(x) quando x estiver nas proximidades de *c.*

Teorema de Fermat: Se *f* tiver um máximo ou mínimo local em *c*, e *f'*(*c*) existir, então *f'*(*c*) = 0.

Então, pelo Teorema de Fermat, encontramos o ponto de máximo ou de mínimo da função, caso ele exista, derivando a função e igualando-a a zero. Para descobrirmos se o ponto encontrado é de máximo ou mínimo, temos que analisar as derivadas nas proximidades do ponto encontrado, conforme indicado na Figura 15.

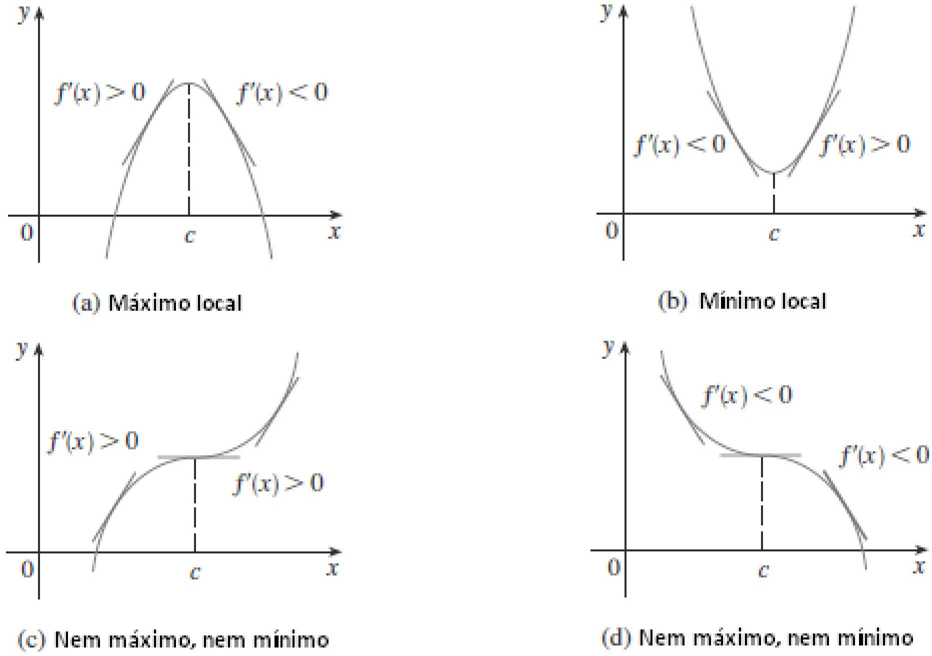


Figura 15

- ***Exemplo Resolvido***

Encontre os valores de máximo e mínimo locais da função

$$g(x) = x + 2 \sin x \qquad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

Diferenciando *g*, temos:

$$g'(x) = 1 + 2 \cos x$$

Logo, fazendo $g'(x) = 0$, temos $\cos x = -1/2$. Como solução dessa equação, temos $2\pi/3$ e $4\pi/3$. Vamos analizar a tabela a seguir.

Intervalo	$g'(x) = 1 + 2 \cos x$
$0 < x < 2\pi/3$	+
$2\pi/3 < x < 4\pi/3$	−
$4\pi/3 < x < 2\pi$	+

Como o sinal de $g'(x)$ muda de positivo para negativo em $2\pi/3$, temos um máximo local em $2\pi/3$ e o valor máximo local é de

$$g(2\pi/3) = \frac{2\pi}{3} + 2 \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3.83$$

Da mesma forma, o sinal de $g'(x)$ muda de negativo para positivo em $4\pi/3$, logo

$$g(4\pi/3) = \frac{4\pi}{3} + 2 \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3} \approx 2.46$$

é um valor de mímimo local.

- ***Exercícios Propostos***

Encontre os valores máximos e mínimos absolutos de *f* no intervalo dado.

62. $f(x) = 3x^2 - 12x + 5, \quad [0, 3]$

63. $f(x) = x^3 - 3x + 1, \quad [0, 3]$

64. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3, \quad [-2, 3]$

65. $f(x) = (x^2 - 1)^3, \quad [-1, 2]$

66. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}, \quad [0, 2]$

67. $f(t) = t\sqrt{4 - t^2}, \quad [-1, 2]$

68. $f(x) = \sin x + \cos x, \quad [0, \pi/3]$

69. $f(x) = xe^{-x}, \quad [0, 2]$

70. $f(x) = x - 3 \ln x, \quad [1, 4]$

71. Um modelo para índice de preço de alimentos (o preço de uma cesta básica) entre 1984 e 1994 é dado pela função

$$I(t) = 0.00009045t^5 + 0.001438t^4 - 0.06561t^3 + 0.4598t^2 - 0.6270t + 99.33$$

onde t é medido em anos desde a metade do ano de 1984; assim $0 \leq t \leq 10$, e $I(t)$ é medido em 1987 dólares e reduzido em uma escala tal que $I(3) = 100$. Estime os períodos nos quais a comida foi mais barata e mais cara durante o período de 1984-1994.

72. Um fazendeiro quer cercar uma área de 1,5 milhão de pés quadrados num campo retangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isso de forma a minimizar o custo da cerca?

73. Uma caixa com uma base quadrada e sem tampa tem um volume de 32.000 cm³. Encontre as dimensões da caixa que minimizam a quantidade de material usado.

74. Um contêiner para estocagem retangular com uma tampa aberta deve ter um volume de 10 m³. o comprimento de sua base é o dobro da largura. O material para a base custa $ 10 por metro quadrado. O material para os lados custa $ 6 por metro quadrado. Encontre o custo dos materiais para o mais barato de tais contêineres.

75. A moldura para uma pipa é feita de 6 pedaços de madeira. Os quatro pedaços externos foram cortados com os comprimentos indicados na figura. Para maximizar a área da pipa , de que tamanho devem ser os pedaços diagonais?